Varianta 37

Subiectul I.

a) $S_{OBC} = 6$.

b) $V_{OABC} = 4$.

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.

d) 13.

e) Ecuația tangentei în A la parabolă este $y = x + 1$.

f) $z \in \{-i, i\}$.

Subiectul II.

1.

a) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}$.

b) 1.

c) Suma căutată este egală cu 0.

d) Probabilitatea căutată este $p = 1$

e) Propoziția este falsă.

2.

a) $f(0) = 0$.

b) $f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

c) $x \in \left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

e) $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Subiectul III.

a) Calcul direct.

b) Se demonstrează prin inducție, folosind punctul **a)**.

c) Pentru $t = 0$ și $k = 2007$, din **b)** obținem $(A(0))^{2007} = A(2006)$.

d) Se folosește punctul **a)**.

e) Evident.

f) Folosind subpunctele anterioare, se verifică ușor axiomele grupului.

g) Dacă mulțimea $N \neq \{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$, atunci există $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$, astfel încât $A(n) \in N$.
Prin inducție se demonstrează că $\forall\, k \in \mathbf{N}^*$, $(A(n))^k \in N$.
Deoarece puterile naturale nenule ale matricei $A(n)$ sunt elemente distincte două câte două ale lui N, mulțimea N este infinită.

Subiectul IV.

a) $g'(x) = -\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$, $h'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$, $\forall\, x \geq 1$.

b) $\forall\, x \geq 1$, $g'(x) \leq 0 \leq h'(x)$, adică funcția g e strict descrescătoare pe $[1, \infty)$ şi funcția h e strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $\forall\, x \geq 1$, $g(x) \leq g(1) = 0 = h(1) \leq h(x)$.

c) Pentru $t > 1$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[1, t]$.
Din teorema lui Lagrange pentru funcția f,
$\exists\ c(t) \in (1, t)$, astfel ca $\dfrac{f(t) - f(1)}{t-1} = f'(c(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{c(t)} = \dfrac{\ln t}{t-1}$.

d) Pentru $t > 1$, din punctul **b)**, avem că $g(t) < 0 < h(t) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0 < \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \ \Leftrightarrow \ \frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}.$$

e) Din punctul **c)**, avem că pentru $t > 1$, $\ln t = \dfrac{t-1}{c(t)}$ şi înlocuind în **d)** obținem concluzia.

f) Presupunem contrariul, deci că există un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $\forall\, x > 1$, $c(x) = P(x)$.

Din punctul **e)** rezultă că $\forall\, x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2} < \dfrac{P(x)}{x^2} < \dfrac{x+1}{2x^2}$, de unde deducem că $grad(P) \leq 1$, aşadar există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $P(X) = aX + b$.

Obținem $c(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} = ax + b$, $\forall\, x > 1$, deci $c'(x) = a$, $\forall\, x > 1$, fals.

g) Înlocuind t cu t^2 în inegalitatea din stânga dedusă la punctul **e)** şi integrând,

deducem:
$$1{,}7 < \frac{7}{4} \leq \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{t^2-1}{\ln t}\, dt \qquad (1)$$

Înmulțind cu $t + 1 > 0$ inegalitatea din dreapta de la la punctul **e)**, şi integrând,

deducem:
$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{t^2-1}{\ln t}\, dt \leq \frac{91}{48} < 1{,}9 \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă concluzia.